1 Vecteur vitesse

1. Système

● On appelle système, un objet ou ensemble d'objets que l'on distingue de son environnement pour en faire l'étude. Un système est indéformable si la distance entre deux quelconques de ses points reste constante au cours du temps ; un tel système est appelé « solide ».

● On définit le centre de masse d'un système comme étant le point remarquable où l'on peut imaginer avoir concentré toute la matière du système, dans le cas où, pour une étude simplifiée, ce système devrait être réduit à un point. Dans le cas d'un solide homogène, le centre de masse est situé au centre géométrique du solide.

2. Référentiels

● Un objet peut être en mouvement par rapport à un observateur et immobile par rapport à un autre. Pour définir le mouvement d'un objet, il est nécessaire de préciser le référentiel d'étude et le repère de temps.

● Un référentiel est le solide ou tout point du solide par rapport auquel on décrit le mouvement d'un mobile. Exemple : le référentiel terrestre (la Terre, le sol, le laboratoire...).

● À ce référentiel, on associe en général un repère d'espace comportant 1, 2 ou 3 vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un point origine O lié au référentiel.

● Pour définir la position d'un objet dans le temps, il est nécessaire de définir un repère de temps. Ce repère est constitué d'un instant ou d'une date origine t_0 (début de l'expérience ou de l'observation par exemple) et d'une unité de durée. Dans le système international (S.I.), l'unité de temps est la **seconde (s)**.

● Tout point M de l'espace est alors repéré, à une date t, par le vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}}\ .$$

● Dans un repère orthonormé, la distance (OM) est alors égale à :

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dans le système international (SI), elle s'exprime en **mètre (m)**.

3. Vecteur vitesse

● Entre les instants t et $t + \Delta t$, le mobile se déplace de M en M' suivant un vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$ qui correspond à une variation du vecteur position :

$$\Delta \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}.$$

● La vitesse instantanée est définie comme étant le **taux de variation de la position par rapport au temps**, pour une durée Δt la plus petite possible :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}.$$

● Le vecteur vitesse est égal à la dérivée du vecteur position par rapport au temps ; il est tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement. Dans un repère fixe $\left(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$: $\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{k} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}}$.

● La valeur de la vitesse est : $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$.

Dans le système international, elle s'exprime **en mètre par seconde ($m.s^{-1}$)**.

Exemple d'application

On photographie la chute d'une goutte d'eau suivant la verticale, à intervalles de temps réguliers $\tau = 20$ ms. Les distances parcourues par la goutte d'eau depuis son départ sont indiquées dans le tableau suivant :

***t* (ms)**	0	τ	2 τ	3 τ	4 τ	5 τ	6 τ	7 τ	8 τ
***d* (cm)**	0	0,2	0,8	1,8	3,1	4,9	7,1	9,6	12,5

1. Quelle est la vitesse instantanée à la date $t_2 = 2\,\tau$? à la date $t_6 = 6\,\tau$?

2. Quelle est la nature du mouvement ?

Corrigé commenté

Indication *: à partir de l'enregistrement des positions successives d'un mobile, on détermine expérimentalement sa vitesse instantanée comme étant une vitesse moyenne calculée pendant une durée τ la plus petite possible.*

1. La vitesse instantanée à la date t_2 est pratiquement égale à la vitesse moyenne calculée entre t_1 et t_3, soit :

$$v_2 = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_3 - d_1}{t_3 - t_1} = \frac{d_3 - d_1}{2\,\tau}.\ \text{AN}: v_2 = \frac{1{,}8 - 0{,}2}{2 \times 20.10^{-3}} = \mathbf{40\ cm.s^{-1}}.$$

De même : $v_6 = \frac{d_7 - d_5}{2\,\tau}$. AN : $v_6 = \frac{9{,}6 - 4{,}9}{2 \times 20.10^{-3}} = \mathbf{117{,}5\ cm.s^{-1}}$.

2. Le mouvement est rectiligne (la trajectoire est une droite verticale) et accéléré (la valeur de la vitesse instantanée est croissante).

2 Première et troisième lois de Newton

1. Forces

● On appelle force toute action mécanique d'un corps sur un autre capable de produire des effets sur le mouvement ou la forme de ce dernier corps.

● Si une force est exercée par un autre point ou objet du système lui-même, il s'agit d'une force intérieure. Si une force est exercée par un objet ou un point extérieur au système, il s'agit d'une **force extérieure**.

● Parmi les forces extérieures, on peut distinguer :
– les forces de contact : le corps qui subit la force est en contact avec celui qui la crée (réaction d'un support, forces de frottement, tension d'un fil...). Les forces de contact peuvent être localisées en un point ou réparties sur la surface de contact ;
– les forces à distance : les deux corps ne sont pas nécessairement au contact l'un de l'autre : forces de gravitation, forces électriques et forces électromagnétiques. Chacune de ces forces est répartie sur l'ensemble du corps, mais elles sont chacune modélisées par une force unique qui s'exerce toujours sur le centre de masse.

2. Systèmes matériels particuliers

● Un système isolé est un système qui n'est soumis à aucune force extérieure.

● Un système pseudo-isolé est un système qui est soumis à des forces extérieures qui se compensent globalement : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

3. Première loi de Newton (ou principe de l'inertie)

● Lorsqu'un solide est isolé ou pseudo-isolé, il existe toujours un point particulier G du solide, appelé centre d'inertie, qui peut :
– soit être au repos, s'il est initialement au repos $\vec{V}_G(t) = \vec{0}$;
– soit être animé d'un mouvement rectiligne uniforme : $\vec{V}_G(t) = \overrightarrow{\text{cte}}$.

● Que le système soit déformable ou indéformable, qu'il soit formé d'une ou de plusieurs parties, le centre d'inertie (C.I.) d'un système est toujours confondu avec le centre de masse (appelé aussi centre de gravité).

● Ce principe n'est valable que dans certains référentiels appelés référentiels galiléens. La Terre (ou le laboratoire) peut être considérée comme un référentiel galiléen. Tout référentiel animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen.

4. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

● Lorsqu'un solide S_1 exerce sur un solide S_2 une force $\vec{F}_{1/2}$ (action), alors le solide S_2 exerce sur le solide S_1 une force $F_{2/1}$ (réaction) telle que :

$$\boxed{\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}}.$$

● Dans tout référentiel, les corps étant immobiles ou animés de mouvements quelconques, ces deux forces ont même intensité, même droite d'action mais elles sont de sens contraires.

Exemple d'application

Une voiture tracte, à vitesse constante et en ligne droite, une caravane sur une route en pente.
On définit successivement plusieurs systèmes :
a. la voiture ;
b. l'attelage (voiture + caravane).

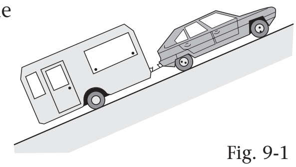

Fig. 9-1

Faire dans chacun des cas le bilan des forces intérieures et extérieures au système en précisant s'il s'agit de forces à distance ou de contact, localisées ou réparties.

Corrigé commenté

Indication *: pensez au principe des actions réciproques ; à toute force exercée par un objet A sur un objet B correspond une force opposée exercée par B sur A.*

a. Le système choisi {la voiture} est soumis aux forces suivantes :
– le poids de la voiture : force **extérieure**, à distance ;
– les réactions du sol sur les roues : forces **extérieures** de contact, réparties ;
– la réaction de la caravane sur la voiture : force **extérieure** de contact, localisée ;
– la force de frottement de l'air sur la voiture : force **extérieure** de contact, répartie.

b. Les forces auxquelles est soumis le système choisi {l'attelage} constitué d'une voiture et d'une caravane sont :
– le poids du système [voiture + caravane] : force **extérieure**, à distance ;
– les réactions du sol sur les roues du système [voiture + caravane] : forces **extérieures** de contact, réparties ;
– la force de frottement de l'air sur le système [voiture + caravane] : force **extérieure** de contact, répartie.
– la force exercée par la voiture sur la caravane et la force exercée par la caravane sur la voiture sont deux forces **intérieures** : elles sont opposées d'après le principe des actions réciproques.

3 Exemples de forces

1. Le poids $\vec{P}$ d'un corps

● La Terre exerce sur tout objet une force de pesanteur appelée poids de l'objet, noté $\vec{P}$. Ses caractéristiques sont :
– direction : verticale
– sens : vers le bas
– valeur : $P = mg$
– point d'application : centre d'inertie de l'objet.

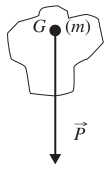

Fig. 9-2

● g intensité de la pesanteur est fonction du lieu et de l'altitude à la surface de la Terre ; en moyenne $g = 9{,}8$ N.kg^{-1}.

2. La réaction $\vec{R}_N$ d'un support sur un solide

● Cette force de contact, répartie sur la surface de contact, est exercée par un support sur l'objet.

● Son point d'application est le centre de la surface de contact (si la répartition est uniforme).

● Sa direction est normale (orthogonale) à la surface de contact ; son sens est vers le haut.

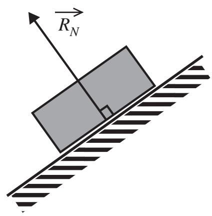

Fig. 9-3

3. Forces de frottement $\vec{f}$

● Ce sont des forces réparties, exercées par tout corps en contact avec le système étudié.

● Leur point d'application est le centre de la surface de contact (si la répartition est uniforme).

● Leur direction est celle du déplacement, mais son sens est inverse de celui du déplacement si le système étudié est en mouvement.

● Leur valeur dépend de la nature des surfaces en contact, de la vitesse, de la forme du mobile...

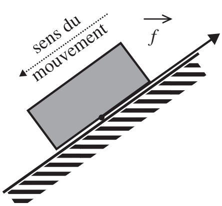

Fig. 9-4 : cas d'un frottement solide

***Remarque :** la réaction totale d'un support sur un solide est :* $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$.

4. Force de rappel $\vec{F}_R$ exercée par un ressort sur un solide

Les caractéristiques de cette force sont :

- direction : celle du ressort
- sens : vers le milieu du ressort
- valeur : $F_R = k(\ell - \ell_0) = k.\Delta\ell$,

où k représente le coefficient de raideur du ressort (en $N.m^{-1}$) et $\Delta\ell$, son allongement.

- point d'application : point d'attache.

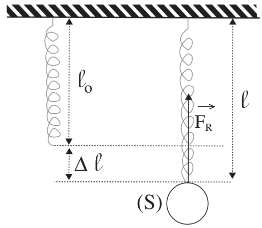

Fig. 9-5

Exemple d'application

On veut fabriquer un dynamomètre avec un ressort de masse négligeable. Pour l'étalonner, on l'accroche à une potence et on suspend à son autre extrémité des masses marquées connues. On obtient les allongements suivants :

m (en g)	0	50	100	150	200	300	400	500
$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ (en cm)	0,0	0,3	0,9	2,2	3,4	5,9	8,3	10,8

Calculer le coefficient de raideur du ressort utilisé, après avoir précisé le domaine où le dynamomètre est utilisable.

Corrigé commenté

***Indication** : deux grandeurs sont proportionnelles lorsque la représentation de l'une en fonction de l'autre donne une droite (fonction linéaire) ou que le rapport de ces deux grandeurs est constant.*

Chaque masse marquée accrochée au ressort est soumise à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la force de rappel $\vec{F}_R$ exercée par le ressort.
À l'équilibre, ces deux forces se compensent :

$$\vec{P} + \vec{F}_R = \vec{0}, \text{ soit } F_R = P = mg.$$

Pour F_R, on obtient les valeurs suivantes en Newtons : 0 ; 0,49 ; 0,98 ; 1,47 ; 1,96 ; 2,94 ; 3,92 ; 4,9.
Les rapports $F_R/\Delta\ell$ sont égaux pour $F_R > 1$ N. Le dynamomètre est donc utilisable pour les valeurs de F_R entre 1 N et 5 N.
Le coefficient de proportionnalité du rapport $F_R/\Delta\ell$ représente le coefficient de raideur du ressort. Il est égal à :

$$k = \frac{F_R(B) - F_R(A)}{\Delta\ell(B) - \Delta\ell(A)} \text{ . AN : } \boldsymbol{k} = \frac{4,6 - 2,6}{10 - 5} = 0,4\ \mathrm{N.cm^{-1}} = \mathbf{40\ N.m^{-1}}.$$

4 Deuxième loi de Newton

1. Variations du vecteur vitesse

● Dans le cas où les forces extérieures appliquées à un système ne se compensent pas $\left(\sum \vec{F}_{ext} \neq \vec{0}\right)$, alors le système voit son état de repos ou de mouvement modifié.

Il y a une modification du vecteur vitesse de son centre d'inertie.

2. Vecteur accélération

● L'accélération représente le taux de variation de la vitesse par rapport au temps, pour une durée Δt la plus petite possible. Le vecteur accélération est égal à la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}\right)}{dt}.$$

● Le repère étant fixe, les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs constants dans le temps et par suite, on a : $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$.

L'expression du vecteur accélération est donc : $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$.

d'où : $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}\,; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}\,; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$.

● La valeur de l'accélération est : $\|\vec{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$. Son unité dans le système international est le **mètre par seconde au carré (m.s^{-2})**.

3. Les différents types de mouvements

● Étudier les variations de $\|\vec{v}\|$ en fonction du temps revient à considérer celles de $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}^2$. Or : $\frac{d\left(\vec{v}\right)^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}.\vec{a}$.

● On en déduit :

– si $\vec{v}.\vec{a} > 0$, alors $\|\vec{v}\|$ augmente : le mouvement est **accéléré** ;

– si $\vec{v}.\vec{a} < 0$, alors $\|\vec{v}\|$ diminue : le mouvement est **retardé** ;

– si $\vec{v}.\vec{a} = 0$, alors $\|\vec{v}\| =$ cte : le mouvement est **uniforme.**

4. Deuxième loi de Newton appliquée au centre d'inertie

● Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide de masse m constante est reliée à l'accélération de son centre d'inertie par la relation : $\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m \, . \, \vec{a}_G}$.

Remarque : si $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, *alors* $\vec{a}_G = \vec{0}$, *ce qui entraîne que* $\vec{V}_G = \overrightarrow{\text{cte}}$. *Le principe de l'inertie est un cas particulier du théorème du centre d'inertie.*

Exemple d'application

Les positions d'une balle lancée en l'air sont repérées dans un plan vertical (Ox ; Oz).
Une analyse informatique des positions de la balle au cours du temps nous donne les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 5{,}2t \\ z(t) = -5t^2 + 3\,t + 1{,}8. \end{cases}$$

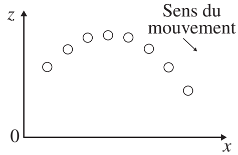

Fig. 9-7

Les distances sont en mètres, les dates en secondes. On prendra g = 10 m.s^{-2}.

1. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur accélération dans le repère (Ox ; Oz).

2. En déduire, à partir du vecteur accélération, que la balle a un mouvement de chute libre.

Corrigé commenté

Indication : *un objet a un mouvement de chute libre s'il n'est soumis qu'à une seule force : son poids.*

1. Les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération sont obtenues par dérivations successives des coordonnées du vecteur position par rapport au temps. On a donc :

$$\vec{v}\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5{,}2 \\ \dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -10t + 3 \end{cases} \quad (1) \quad \text{et} \quad \vec{a}\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \ddot{z} = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = -10 \end{cases} \quad (2).$$

2. D'après (2), on constate que : $\vec{a} = \vec{g}\begin{cases} 0 \text{ m.s}^{-2} \\ -10 \text{ m.s}^{-2} \end{cases}$.

Or dans le référentiel terrestre supposé galiléen et d'après la deuxième loi de Newton, la balle n'est soumise qu'à une seule force, son poids. On a : $m \, . \, \vec{a} = m \, . \, \vec{g} = \vec{P}$: la balle a un mouvement de chute libre.